POLITECNICO DI MILANO

Meccanica dei Fluidi

6. Analisi Dimensionale

A cura di: Diego Berzi

v1.0

Indice

1 Introduzione

In ambito scientifico e/o tecnologico occorre, spesso, predire il valore di una determinata grandezza fisica, detta **variabile di stato** o **dipendente**, a partire dai valori noti di altre grandezze fisiche dette **variabili di controllo** o **indipendenti**.

Al più alto livello di sofisticazione, tale predizione può essere ottenuta risolvendo un **modello matematico**, rappresentazione della realtà fisica attraverso equazioni matematiche, in cui le variabili di controllo rappresentano i parametri di input. Purtroppo, tale approccio non è sempre praticabile: se il problema fisico è particolarmente complesso, potrebbe non esistere un modello matematico riconosciuto valido da buona parte dalla comunità scientifica; oppure può darsi che il modello matematico non sia risolvibile con gli attuali strumenti matematici e/o numerici (troppe e/o troppo complesse equazioni).

Un'alternativa, che può anche essere utilizzata in parallelo ai modelli matematici, è quella di condurre degli esperimenti (fisici e/o, più recentemente, delle simulazioni numeriche al calcolatore) su di un **modello fisico** e/o **numerico**, e misurare direttamente il valore della variabile di stato per un determinato insieme di variabili di controllo. Gli esperimenti possono, anche, essere utilizzati per determinare a posteriori delle **leggi empiriche** (sotto forma di espressioni matematiche o rappresentazioni grafiche) che consentano di determinare il valore della variabile di stato anche per valori delle variabili di controllo diverse da quelle che si sono utilizzate nel corso della sperimentazione. Naturalmente, bisogna accertarsi che il modello fisico o numerico sia una buona rappresentazione della realtà, e che la sperimentazione sia condotta in maniera efficiente.

2 Teorema Π

Prendiamo una generica variabile di stato g_0 e supponiamo che esista un legame fisico tra di essa e n variabili di controllo g_i, con i che va da 1 a n. Si può, allora, dire che

$$g_0 = f(g_1, g_2, g_3, ..., g_n), \tag{1}$$

dove f rappresenta una funzione a priori incognita, da determinare, per esempio, attraverso una sperimentazione. Il procedimento più razionale per effettuare una sperimentazione è quello di far variare le variabili di controllo una alla volta, mantenendo costanti tutte le altre. In questo modo, si studia l'influenza di quella particolare variabile di controllo sul problema, evitando confusioni o sovrapposizioni di effetto con altre variabili. Supponendo di utilizzare, per ogni variabile di controllo, almeno 10 valori, il numero di esperimenti necessario per indagare completamente la dipendenza di g_0 dalle n variabili di controllo è pari al numero di permutazioni di n gruppi di 10 elementi, cioè 10^n. Il numero di esperimenti da effettuare è, dunque, molto elevato, anche se le variabili di controllo sono poche.

Le variabili che compaiono nell'Eq.(1) sono dimensionali, nel senso che sono espresse in un sistema di unità di misura standard. La scelta di un particolare sistema di unità di misura è del tutto arbitraria. In quanto tale, non può avere conseguenze sulla sussistenza del legame fisico tra variabile di stato e variabili di controllo. Risulta, dunque, lecito passare da un sistema di unità di misura standard a uno intrinseco al problema oggetto di studio. Scegliamo una base costituita da un numero k di variabili di controllo che siano tra di loro dimensionalmente indipendenti, dove k deve essere sufficiente ad esaurire i gradi di libertà dimensionali delle variabili in gioco. Ad esempio, in un problema meccanico indipendente dalla temperatura, tutte le unità di misura delle variabili del problema si possono costruire a partire dalla terna Lunghezza, Massa e Tempo: in questo caso risulta, dunque, $k = 3$, e si parla di terna base. Esprimiamo ora tutte le variabili del problema nel nuovo sistema di unità di misura. Per fare questo occorre determinare la **misura** di ogni grandezza rispetto alle grandezze base. Consideriamo, per semplicità, il caso $k = 3$, e supponiamo che la terna base sia costituita dalle grandezze g_1, g_2 e g_3. La misura della grandezza g_0 rispetto a tale terna è

$$\Pi_0 = \frac{g_0}{g_1^\alpha g_2^\beta g_3^\gamma}, \tag{2}$$

in cui α, β e γ sono 3 esponenti che si determinano imponendo che Π_0 sia adimensionale (**numero puro**), cioè che

$$[g_0] = [g_1]^\alpha [g_2]^\beta [g_3]^\gamma , \tag{3}$$

dove le parentesi quadre indicano le dimensioni della grandezza. L'Eq.(3) corrisponde ad un sistema di 3 equazioni scalari. La misura Π_0 è anche chiamata **gruppo** Π associato con la grandezza g_0. Allo stesso modo, si determinano i gruppi Π associati con tutte le variabili del problema. Dal momento che il legame fisico espresso nell'Eq.(1) deve sussistere anche nel nuovo sistema di unità di misura, possiamo scrivere

$$\Pi_0 = f^*(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_n). \tag{4}$$

La funzione che compare nell'Eq.(4) è, in generale, diversa da quella che compare nell'Eq.(1), banalmente per via dei fattori numerici di conversione delle unità di misura. Per quanto riguarda g_1, risulta

$$\Pi_1 = \frac{g_1}{g_1^1 g_2^0 g_3^0} = 1, \tag{5}$$

per via dell'ipotesi di indipendenza dimensionale delle grandezze che costituiscono la terna base. Analogamente, risulta $\Pi_2 = \Pi_3 = 1$. L'Eq.(4) si riduce, allora, a

$$\Pi_0 = f^*(\Pi_4, ..., \Pi_n). \tag{6}$$

Combinando le Eqs. (2) e (6), si può sempre ottenere il valore dimensionale di g_0 come

$$g_0 = g_1^\alpha g_2^\beta g_3^\gamma f^*(\Pi_4, ..., \Pi_n). \tag{7}$$

Abbiamo appena dimostrato che, in un sistema fisico, è sempre possibile, con una scelta opportuna del sistema di unità di misura, ridurre il numero delle variabili di controllo di tante unità quante sono le unità di misura fondamentali. Questo è l'enunciato del **Teorema di Buckingham** [1], detto anche **Teorema** Π. Tale teorema, enunciato e dimostrato agli inizi del novecento, è uno dei pilastri della Scienza moderna e garantisce, tra le altre cose, l'**universalità** delle leggi fisiche, se espresse in termini adimensionali. La funzione f^* dell'Eq.(6) ha, infatti, carattere universale: i coefficienti numerici che in essa compaiono sono adimensionali ed il loro valore è indipendente dal sistema di unità di misura nel quale sono espresse le grandezze g_i originarie. Il fatto di avere ridotto il numero delle variabili di controllo permette di ridurre il numero di esperimenti necessario per determinare il legame funzionale tra la variabile di stato e le variabili di controllo: si passa, infatti, dai 10^n esperimenti necessari nel caso dell'Eq.(1), ai 10^{n-3} nel caso dell'Eq.(6) (una riduzione di 3 ordini di grandezza!). Sfortunatamente, persino in ambito ingegneristico, diverse discipline non fanno uso del teorema Π, con la conseguenza che molte indagini sperimentali risultano sovrappopolate di esperimenti, con inutile spreco di tempo e denaro. Per quanto riguarda la scelta delle grandezze facenti parte della base, essa non è univoca. Per ridurre il rischio di condurre più esperimenti di quelli strettamente necessari, meglio, però, scegliere quelle che si pensa abbiano veramente effetto sul problema.

A parte i vantaggi di ridurre il numero di esperimenti e di ottenere leggi in forma universale, la formulazione del problema in termini adimensionali, sfruttando il teorema Π, ha anche un vantaggio pratico. Come già detto, una sperimentazione ideale dovrebbe essere condotta variando un parametro di controllo alla volta. Purtroppo, questo non è sempre possibile. Si pensi, ad esempio, al caso dei fluidi: è difficile variare una delle proprietà del fluido (densità, viscosità, comprimibilità e tensione superficiale) senza, contemporaneamente, variare le altre. Nella formulazione adimensionale, però, è possibile variare il gruppo pi-greco associato con una variabile di controllo agendo su una qualsiasi delle grandezze che lo compongono. Ad esempio, si può variare il gruppo Π_4 nell'Eq.(6) agendo su una qualsiasi tra le grandezze dimensionali g_1, g_2, g_3 e g_4. Questo consente, dunque, una maggiore elasticità sperimentale.

Vale la pena ribadire che l'incognita del problema risulta essere la forma della funzione f^* nell'Eq.(6) (legge empirica). A priori, non è, dunque, necessario conoscere l'influenza delle variabili di controllo sulla variabile di stato, ma è certamente necessario identificare correttamente le variabili di controllo (tipico approccio a scatola chiusa). In particolare [2, 3]:

- tra le variabili di controllo vanno incluse le caratteristiche **geometriche** del dominio, le condizioni al contorno **cinematiche** e le forze esterne (condizioni **dinamiche**) agenti sul sistema, oltre, naturalmente, alle **proprietà fisiche** del materiale o dei materiali oggetto di studio. Se la variabile di stato è una variabile **locale**, le coordinate x, y e z del punto in corrispondenza del quale viene misurata la variabile di stato rientrano tra le variabili di controllo. In un problema non-stazionario, anche il tempo t deve essere incluso tra le variabili di controllo.

- Le variabili di controllo devono essere, effettivamente, indipendenti tra di loro: se esiste un legame tra alcune delle variabili di controllo, una di esse deve essere omessa. Ad esempio, se una variabile di controllo è rappresentata dal diametro di una sezione circolare, l'area della stessa sezione non va inclusa tra le variabili di controllo; allo stesso modo, se tra le variabili di controllo ci sono area di una sezione e velocità media sulla sezione stessa, la portata deve essere omessa.

- Se nel corso di una sperimentazione si tiene costante un parametro di controllo, non significa che non si stia studiando l'influenza di quel parametro sulla variabile di stato. Infatti, il parametro di controllo può anche rimanere costante (per esempio l'accelerazione di gravità è una costante per tutti gli esperimenti condotti sulla Terra), ma il gruppo Π ad essa associato, che coinvolge anche le grandezze base, può variare nel corso della sperimentazione.

- Il gruppo Π associato con una variabile adimensionale (ad esempio un angolo) è la stessa variabile adimensionale.

- I gruppi Π associati alle variabili di controllo si possono combinare a patto di mantenerne numero e indipendenza. Per esempio, al posto di Π_4 e Π_5 si può usare $1/\Pi_4$ e Π_5, oppure Π_4/Π_5 e Π_4^2, e così via.

Tornando all'Eq.(6), può succedere che, quando un certo parametro di controllo Π_k diventa molto piccolo (o molto grande), scompaia la dipendenza di Π_0 da esso. In termini matematici, tale condizione si scrive:

$$\exists \text{ finito } \lim_{\Pi_k \to 0 (\Pi_k \to \infty)} \Pi_0 \neq 0. \tag{8}$$

Se si verifica questo, si dice che Π_0 diventa **autosimile** rispetto a Π_k. É importante che il limite sia diverso da zero (**autosimilitudine completa**); se il limite è uguale a zero, si parla di **autosimilitudine incompleta**, e non si può più affermare che scompaia la dipendenza di Π_0 da Π_k. In quest'ultimo caso, però, è, di solito, possibile determinare un esponente a tale per cui

$$\exists \text{ finito } \lim_{\Pi_k \to 0 (\Pi_k \to \infty)} \frac{\Pi_0}{\Pi_k^a} \neq 0, \tag{9}$$

cioè Π_0 risulta infinitesimo di ordine a rispetto a Π_k (viene esplicitata in forma monomia la dipendenza da Π_k quando quest'ultimo è molto piccolo o molto grande).

3 Modellazione

La funzione f^* nell'Eq.(6), che ha carattere universale, può essere utilizzata per predire il comportamento di sistemi fisici di dimensioni diverse da quello sul quale è stata condotta la sperimentazione. In altre parole, si può usare un modello per predire il comportamento della realtà (**prototipo**). Per fare questo, è necessario conoscere il rapporto tra una generica grandezza misurata sul modello e la corrispondente (omologa) grandezza del prototipo, e tale rapporto (detto **scala**) deve essere lo stesso per grandezze omogenee. Se si verifica questo, se, cioè, il rapporto tra grandezze omogenee e omologhe nei due sistemi è una costante, si dice che i due sistemi sono in **similitudine completa**.

Esistono anche accezioni parziali di similitudine. Ad esempio, si parla di **similitudine geometrica** se il rapporto tra le lunghezze di due segmenti omologhi nei due sistemi è costante, indipendentemente dalla scelta della coppia di segmenti omologhi. Tale rapporto viene solitamente indicato come λ e denominato **scala geometrica**. L'esistenza della scala geometrica implica che esista una scala per qualsiasi grandezza di tipo geometrico. Ad esempio, le scale delle aree λ_A e dei volumi λ_W risultano uguali a λ^2 e λ^3, rispettivamente (visto che $[A] = [L]^2$ e $[W] = [L]^3$). Si parla di **similitudine cinematica** se il rapporto tra le velocità di due punti omologhi (**scala delle velocità** λ_V) nei due sistemi è costante, indipendentemente dalla scelta della coppia di punti omologhi. Si parla di **similitudine dinamica** se il rapporto tra le forze agenti su due punti omologhi (**scala delle forze** λ_F) nei due sistemi è costante, indipendentemente dalla scelta della coppia di punti omologhi.

In un problema meccanico, se due sistemi sono in similitudine geometrica, cinematica e dinamica allora sono in similitudine completa: la scala di qualsiasi grandezza è univocamente determinata dalla conoscenza di tre scale di grandezze dimensionalmente indipendenti tra di loro. Allo stesso modo, se la scala di qualsiasi grandezza è univocamente determinata dalla conoscenza di tre scale di grandezze dimensionalmente indipendenti tra di loro, allora i due sistemi fisici sono in similitudine completa.

3.1 Condizione sufficiente del teorema Π

Prendiamo ora due sistemi fisici, un modello e un prototipo, e definiamo la relazione funzionale tra variabile di stato e variabili di controllo nei due sistemi. Identifichiamo con un apice le grandezze relative al modello. Per il prototipo,

$$g_0 = f(g_1, g_2, g_3, g_4, ..., g_n), \tag{10}$$

mentre per il modello

$$g'_0 = f'(g'_1, g'_2, g'_3, g'_4, ..., g'_n). \tag{11}$$

In generale le due funzioni sono diverse. Passando alla formulazione in termini adimensionali, utilizzando come terna base le grandezze g_1, g_2 e g_3 per il prototipo e le omologhe g_1', g_2' e g_3' per il modello, si ottiene

$$\Pi_0 = f^*(\Pi_4, ..., \Pi_n), \tag{12}$$

e

$$\Pi_0' = f^*(\Pi_4', ..., \Pi_n'). \tag{13}$$

La funzione f^* nelle Eqs. (12) e (13) è la stessa (universale). Se ora ipotizziamo che i gruppi Π associati con le variabili di controllo siano gli stessi nei due sistemi ($\Pi_i = \Pi_i'$ con i che va da 4 a n), ne risulta necessariamente che $\Pi_0 = \Pi_0'$. Dalla definizione di gruppo Π risulta, dunque,

$$\frac{g_0}{g_1^\alpha g_2^\beta g_3^\gamma} = \frac{g_0'}{g_1'^\alpha g_2'^\beta g_3'^\gamma}, \tag{14}$$

e, riarrangiando,

$$\lambda_0 = \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \lambda_3^\gamma, \tag{15}$$

dove $\lambda_0 = g_0'/g_0$ è la scala della grandezza g_0, e $\lambda_1 = g_1'/g_1$, $\lambda_2 = g_2'/g_2$ e $\lambda_3 = g_3'/g_3$ sono le scale delle grandezze g_1, g_2 e g_3, rispettivamente. L'Eq.(15) ci dice che la scala di qualsiasi grandezza è univocamente determinata dalla scala di tre altre grandezze (si noti che non necessariamente tali grandezze devono coincidere con le grandezze della terna base), e ci dice come passare da una misura sul modello alla corrispondente grandezza nel prototipo. Quello che abbiamo appena dimostrato prende il nome di **condizione sufficiente** del teorema Π: è sufficiente che i gruppi Π associati alla variabili di controllo siano uguali perché due sistemi siano in similitudine completa. Nel progettare un modello, dunque, bisognerebbe rispettare tale condizione e fissare le variabili di controllo in modo che i gruppi Π ad esse associati siano uguali a quelli del prototipo. Nel fare questo, ci rimangono solo **3** gradi di libertà (nel caso di problemi meccanici; in un caso generico, tanti gradi di libertà quante sono le grandezze base) nella scelta arbitraria delle scale del problema; tutte le altre scale sono determinate da relazioni del tipo rappresentato nell'Eq.(15).

Nell'ambito della Meccanica dei Fluidi, siamo costretti a fissare più di 3 scale: oltre alla scala geometrica, spesso imposta da ragioni logistiche e/o economiche, infatti, siamo costretti a scegliere le scale legate alle proprietà fisiche del fluido stesso (densità, viscosità, comprimibilità e tensione superficiale) e la scala della gravità. Il risultato è un problema sovravincolato, per cui è impossibile rispettare la condizione sufficiente del teorema Π: in genere, almeno 3 dei gruppi Π associati alle variabili di controllo devono essere diversi nel prototipo e nel modello, che non sono, dunque, in similitudine completa. Se siamo fortunati alcuni dei vincoli in eccesso possono essere eliminati se il problema non dipende dalla gravità (se non ci sono interfacce tra fluidi a diverso peso specifico) e/o da una o più delle proprietà fisiche del fluido (ad esempio, se non ci sono interfacce tra fluidi non miscibili, il problema non dipende dalla tensione superficiale). Altri vincoli in eccesso possono essere rilassati se nel prototipo sono presenti autosimilitudini (bisogna però garantire che tali autosimilitudini siano presenti anche nel modello). Se, nonostante tutto, il problema rimane sovravincolato, bisogna accettare il fatto che i due sistemi non possono essere simili e cercare di stimare l'effetto della mancata similitudine nel passaggio da modello a prototipo.

Riferimenti bibliografici

[1] Buckingham, E., *On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations*, Phys. Rev., 4, 345-376 (1914).

[2] Franzetti S., Guadagnini, A., and Ballio, F., *Appunti di Similitudine e Modelli*, corso di idraulica II, Sezione Ingegneria Idraulica, DICA, Politecnico di Milano.

[3] Guadagnini, A., and Riva, M., *Appunti di Similitudine e Modelli*, Sezione Ingegneria Idraulica, DICA, Politecnico di Milano.